## Γενικές Ασκήσεις

25-5-17

**Ασκ**

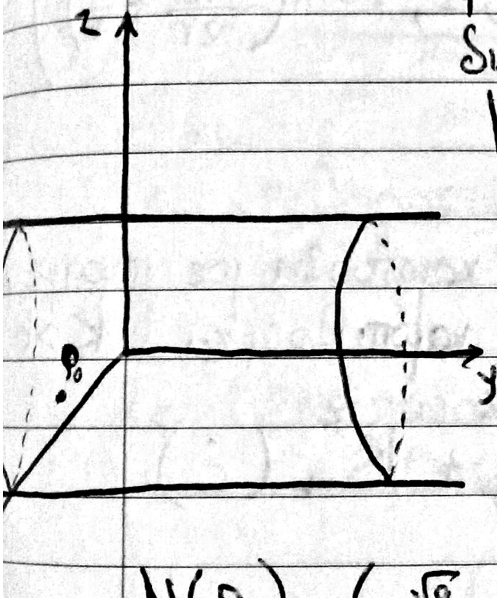
Δίνεται η επιφάνεια $S: x^2+z^2=r^2$,
$p_0=\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $w=(1,1,-1)$. Να υπολογισθεί το $\exp_{p_0}(w)$, όπου $\exp_{p_0}$ η εκθετική απεικόνιση της $S$ στο $p_0$

**Λύση**

$\exp_{p_0}: B_\varepsilon(0) \subset T_{p_0}S \longrightarrow S$

$\exp_{p_0}(w)=\gamma(1; p_0, w)$

Πρέπει να βρω τη γεωδαισιακή $\gamma(t)=\gamma(t,p_0,w)$
δηλαδή $\gamma(0)=p_0$, με $\gamma'(0)=w$, $p_0\in S$




$S=f^{-1}(0)$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+z^2-r^2$,
δηλαδή $S$ κανονική επιφάνεια.
Η απεικόνιση Gauss είναι: $N: S\to S^2$,

$$N(p)=\frac{\operatorname{grad} f(p)}{\|\operatorname{grad} f(p)\|}$$

$$N(x,y,z)=\frac{(2x,0,2z)}{2\sqrt{x^2+z^2}} \Leftrightarrow N(x,y,z)=\left(\frac{x}{r},0,\frac{z}{r}\right)$$

$$N(p_0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \langle N(p_0),w\rangle=0 \Rightarrow w\in T_{p_0}S$$

Η $\gamma(t)$ είναι κυλινδρική έλικα, αφού $w \nparallel Oy \wedge w \not\perp Oy$.
Έτσι, $\gamma(t)=\left(r\cos(at+t_0), bt, r\sin(at+t_0)\right)$
Πρέπει $\gamma(0)=p_0 \Leftrightarrow (r\cos t_0, 0, r\sin t_0)=\left(r\frac{\sqrt{2}}{2},0,r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos t_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin t_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{t_0=\pi/4.}$$

Έτσι, $\gamma(t) = \left(r\cos\left(at+\frac{\pi}{4}\right), bt, r\sin\left(at+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Αρχικά πρέπει: $\gamma'(0) = w \iff \left(-ra\sin\frac{\pi}{4}, b, ar\cos\frac{\pi}{4}\right) = (1,1,-1)$

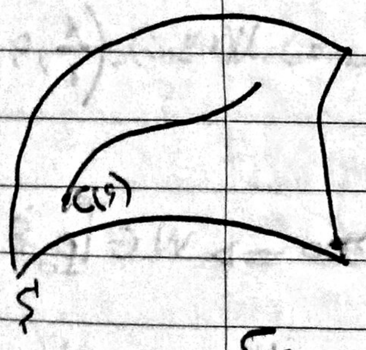
$$\iff \begin{cases} -ra\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \\ b = 1 \\ ra\frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \end{cases} \iff \boxed{b=1} \quad \boxed{a = -\frac{\sqrt{2}}{r}}$$

Άρα, $\gamma(t) = \gamma(t; p_0, w) = \left(r\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{r}+\frac{\pi}{4}\right), t, r\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{r}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Τελικά, $\exp_{p_0}(w) = \left(r\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2r}+\frac{\pi}{4}\right), 1, r\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2r}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

• Έχουμε δείξει: $c: I \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και καμπυλότητα $k>0$. Τότε ισχύει:

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2(c)$$




Εφαρμογή σε αυτό

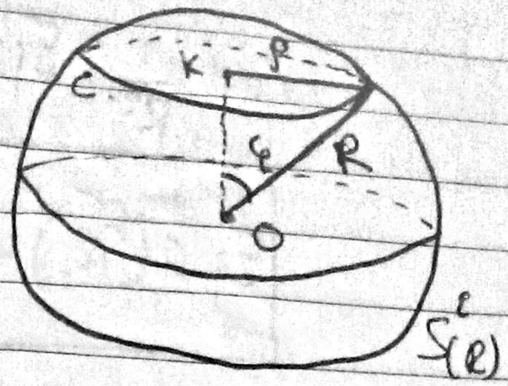
Για $S = S^2(R)$.

Ξέρουμε, $N: S^2(R) \to S^2$, $N(x,y,z) = \frac{1}{R}(x,y,z)$

Η απεικόνιση Weingarten στο σημείο $p \in S^2(R)$ είναι $L_p: T_pS^2(R) \to T_pS^2(R)$, $L_p = \frac{1}{R} I_d$.

και $II_p = \frac{1}{R} I_p$.

$$K_n(\vec{w}) = \frac{II(\vec{w})}{I(\vec{w})} = \frac{1}{R}$$




Έστω c κύκλος της $S^2(R)$

$\sin\varphi = \frac{\rho}{R}$

$K = \frac{1}{\rho}$

Η γεωδαισιακή καμπυλότητα $K_g$ του κύκλου c, πληροί:

$$\frac{1}{\rho^2} = K_g^2 + \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow K_g = \pm\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}}$$

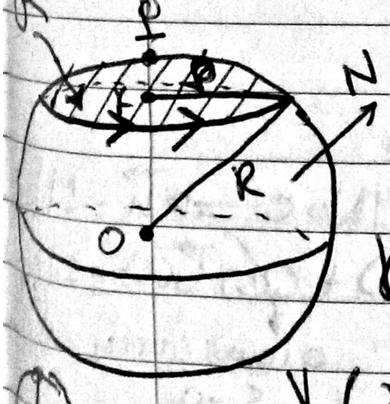
$$\Leftrightarrow \boxed{K_g = \pm\frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{\rho R}}$$

Ασκ

Να υπολογιστεί το εμβαδό ενός γεωδαισιακού δίσκου της σφαίρας $S^2(R)$

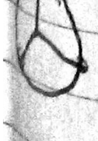
Λύση

Στη περίπτωση της επιφάνειας $S^2(R)$ οι γεωδ. κύκλοι είναι συνήθεις κύκλοι. Από Θεώρημα G-B έχω:




$$\iint_{\mathcal{R}} K\, d\sigma + \int_c K_g\, ds + 0 = 2\pi\chi(\mathcal{R}) \quad (*)$$

$K = \frac{1}{R^2}$, $K_g = -\frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{\rho R}$ (από πριν και έχοντας πάρει προσαν.)



$$\chi(\mathcal{R}) = V - E + F = 4 - 6 + 3 = 1$$

(*): $\frac{1}{R^2}\iint_{\mathcal{R}} 1\cdot d\sigma - \frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{R\rho}\int_0^L 1\, ds = 2\pi$, $L = 2\pi\rho$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R^2}\cdot \text{Εμβ}(\mathcal{R}) - 2\pi\rho\,\frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{R\rho} = 2\pi \Leftrightarrow$$

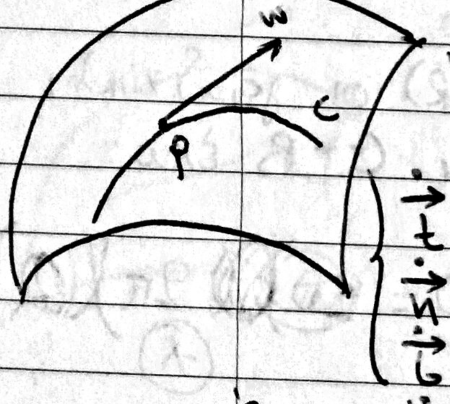
$$\boxed{\text{Εμβ}(\mathcal{R}) = 2\pi R^2 + 2\pi R\,\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

Άσκ

Δ.ότι αν όλες οι γεωδαισιακές μιας επιφάνειας $S$ είναι επίπεδες, τότε η $S$ είναι τμήμα επιπέδου ή σφαίρας

Λύση

[Υπενθύμιση: Μια καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ με παράμετρο το μήκος τόξου είναι γεωδαισιακή $\Leftrightarrow k_g = 0 \Leftrightarrow \frac{D\dot{c}}{ds} = 0$ $\Leftrightarrow \ddot{c}(s) \,//\, N\circ c(s)$]




Έστω $p \in S$ και $w \in T_pS$, με $\|w\| = 1$
Υπάρχει γεωδαισιακή $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, με $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = w$. Υποθέτω ακόμα ότι $k>0$

$$\begin{cases} \dot{\vec{t}} = k\vec{n} \\ \dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau\vec{b} \\ \dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n} \end{cases}$$

Όμως $\ddot{c} \,//\, N\circ c \Leftrightarrow \dot{\vec{t}} \,//\, N\circ c \Leftrightarrow k\vec{n} \,//\, N\circ c \Rightarrow \vec{n} = \pm N\circ c$

$$\Rightarrow \dot{\vec{n}}(s) = \pm (N\circ c)^{\cdot}(s) \Rightarrow -k(s)\vec{t}(s) + \underbrace{\tau(s)}_{0 \text{ (αφού επίπεδη γεωδ.)}}\vec{b}(s) = \pm dN_{c(s)}(\dot{c}(s))$$

$$\xLeftrightarrow{L_{c(s)} = -dN_{c(s)}} -k(s)\vec{t}(s) = \pm L_{c(s)}\vec{t}(s) \xRightarrow{s=0}$$

$$-k(0)\vec{t}(0) = \pm L_p(\vec{t}(0)) \xRightarrow{\dot{c}(0)=w} k(0)\,w = \pm L_{c(0)} w$$

$\Rightarrow w$ κύρια διεύθυνση. Δηλαδή, έδειξα ότι κάθε

$w \in T_pS$ είναι κύρια διεύθυνση $\forall p \in S \Rightarrow K_1(p) = K_2(p), \forall p \in S$
Έτσι, από το θεώρημα αφού κάθε $p$ είναι ομφαλικό έπεται το συμπέρασμα.

__Άσκ__

Έστω $S$ συμπαγής επιφάνεια η οποία δεν είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα. Δ.ό.τι υπάρχουν σημεία στα οποία η καμπυλότητα Gauss είναι θετική, 0, αρνητική.

__Λύση__

Ως γνωστό σε κάθε συμπαγής επιφάνεια υπάρχει σημείο $p_+ \in S$ και $K(p_+) > 0$.

$\chi(\text{σφαίρας}) = 2$. Από υπόθεση: $\chi(S) \leq 0$.

$$\iint_S K \, d\sigma = 2\pi \chi(S) \leq 0$$

Ισχυρισμός: $\exists p_- \in S$, ώστε $K(p_-) < 0$

Απόδειξη: Έστω $K(p) \geq 0, \forall p \in S \Rightarrow 0 \geq \iint_S K d\sigma \geq 0$
$\Rightarrow \iint_S K d\sigma = 0 \xRightarrow{K \geq 0} K(p) = 0, \forall p \in S$, __Άτοπο!__

Άρα, $\exists p_+, p_- \in S$: $K(p_+) > 0$, $K(p_-) < 0$, λόγω συνέχειας: υπάρχει $p_0 \in S$: $K(p_0) = 0$.

__Άσκ__

Να υπολογιστεί η ολική καμπυλότητα Gauss των επιφανειών: $S_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, $S_2: x^8 + y^{10} + z^6 = 1$.

__Λύση__

• Από Θεώρημα Gauß-Bonnet:

$$\iint_{S_1} K\, d\sigma = 2\pi\, \chi(S_1)$$

$S_1: \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1$. Ορίζω $\varphi: S_1 \to S^2$, ως $\varphi(x,y,z) = \left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}, \frac{z}{\gamma}\right)$ (Να διαπιστώσω ότι είναι ομοιομορφισμός)

$\varphi$ ομοιομορφισμός $\Rightarrow \chi(S_1) = \chi(S^2) = 2$.

Άρα: $$\iint_{S_1} K\, d\sigma = 4\pi$$

• $S_2: x^2 + (y^5)^2 + (z^3)^2 = 1$

Όταν $(x,y,z) \in S_2 \Rightarrow (x, y^5, z^3) \in S^2$. Έτσι ορίζω $\varphi: S_2 \to S^2$; $\varphi(x,y,z) = (x, y^5, z^3)$

$\varphi$ ομοιομορφισμός $\Rightarrow \chi(S_2) = \chi(S^2) = 2$

Άρα: $$\iint_{S_2} K\, d\sigma = 4\pi.$$

## Ασκ

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο $s$ το μήκος τόξου και καμπυλότητα $K>0$. Ορίζω επιφάνεια παραμετρική $X(s,v) = c(s) + v\,\vec{b}(s)$. Δ.ό.τι η $c$ είναι γεωδαισιακή της επιφάνειας, $s \in I$, $v \in \mathbb{R}$

Λύση

Δηλαδή, για $v=0$

$X(s,0)=c(s)$, άρα η καμπύλη περιέχεται στην επιφάνεια

Η $c(s)$ είναι γεωδαισιακή $\Leftrightarrow \ddot{c} \parallel N \circ c$

$X_s(s,v) = \dot{c}(s) + v\vec{b}(s) = \vec{t}(s) - v\tau(s)\vec{n}(s)$

$X_v(s,v) = \vec{b}(s)$

$X_s \times X_v(s,v) = \vec{t}(s)\times\vec{b}(s) - v\tau(s)\vec{n}(s)\times\vec{b}(s) = -\vec{n}(s) - v\tau(s)\vec{t}(s)$

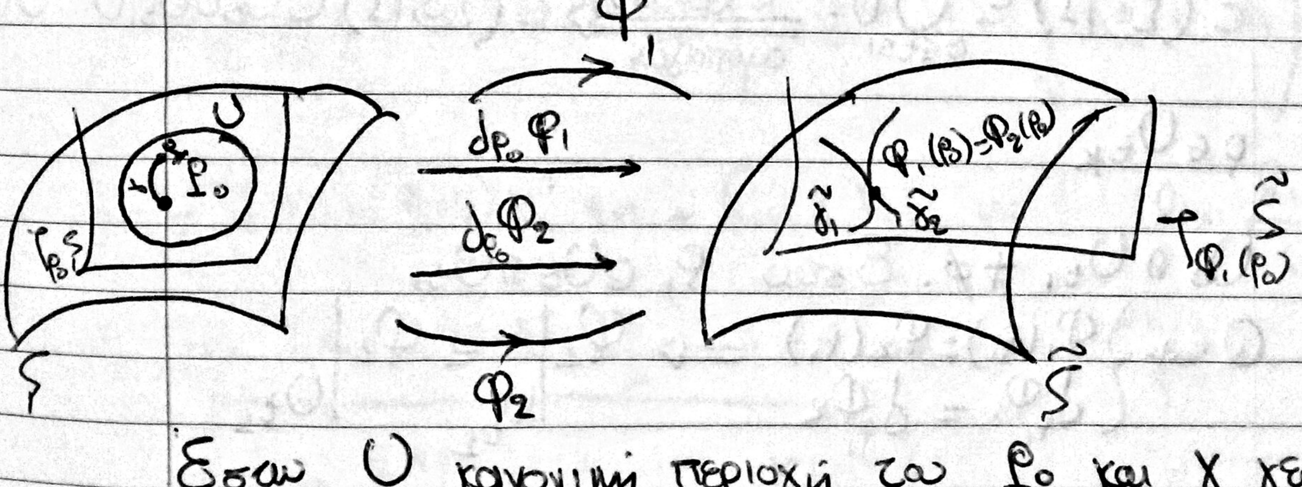
$$N(s,v) = \frac{-\vec{n}(s) - v\tau(s)\vec{t}(s)}{\sqrt{1+v^2\tau^2(s)}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{c}(s) = \dot{\vec{t}}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s) \\ N\circ c(s) \overset{v=0}{=} -\vec{n}(s)\end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{c}(s) \parallel N(c(s)) \Rightarrow c(s) \text{ γεωδαισιακή}$$

<u>Άσκ</u>

Έστω $\varphi_1, \varphi_2 : S \longrightarrow \tilde{S}$ ισομετρίες. Αν υπάρχει σημείο $p_0 \in S$, ώστε $\varphi_1(p_0) = \varphi_2(p_0)$ και $d_{p_0}\varphi_1 = d_{p_0}\varphi_2$, τότε $\varphi_1 = \varphi_2$

<u>Λύση</u>



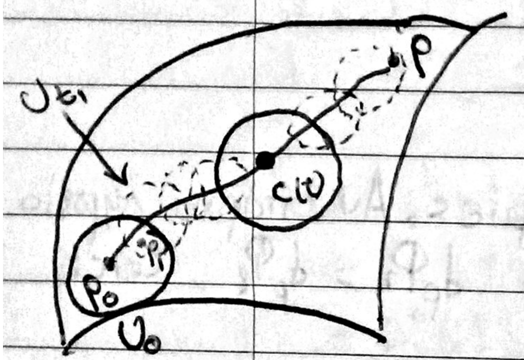

Έστω $U$ κανονική περιοχή του $p_0$ και $\gamma$ γεωδαισιακή $\gamma:[0,l]\to U$, με $\gamma(0)=p_0$, $\gamma(l)=p$. Θεωρώ τις $\tilde{\gamma}_1 = \varphi_1\circ\gamma$, $\tilde{\gamma}_2 = \varphi_2\circ\gamma$. Επειδή $\varphi_1,\varphi_2$ ισομετρίες, οι $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ είναι γεωδαισιακές της $\tilde{S}$.

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1(0) &= \varphi_1(\gamma(0)) = \varphi_1(p_0)\\ \tilde{\gamma}_2(0) &= \varphi_2(\gamma(0)) = \varphi_2(p_0)\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\varphi_1(p_0)=\varphi_2(p_0)} \boxed{\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)} \ ①$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1'(0) &= (\varphi_1\circ\gamma)'(0) = d_{p_0}\varphi_1(\gamma'(0))\\ \tilde{\gamma}_2'(0) &= (\varphi_2\circ\gamma)'(0) = d_{p_0}\varphi_2(\gamma'(0))\end{aligned}\right\} \xRightarrow{d_{p_0}\varphi_1 = d_{p_0}\varphi_2} \boxed{\tilde{\gamma}_1'(0) = \tilde{\gamma}_2'(0)} \ ②$$

Από ①, ② λόγω μοναδικότητας των γεωδαισιακών έχω
$\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2 \Rightarrow \tilde{\gamma}_1(\ell) = \tilde{\gamma}_2(\ell) \Rightarrow \varphi_1(\gamma(\ell)) = \varphi_2(\gamma(\ell)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi_1(p) = \varphi_2(p),\ \forall p\in U \Rightarrow \varphi_1\big|_U = \varphi_2\big|_U$

Τώρα θέλω ν.δ.ό $\varphi_1 = \varphi_2$ σε όλη την επιφάνεια




Υπάρχει συνεχής καμπύλη $c:[0,1]\to S$ με $c(0) = p_0$ και $c(1) = p$. Γνωρίζω από πριν $\exists$ ανοικτή περιοχή $U_0$ ώστε $\varphi_1\big|_{U_0} = \varphi_2\big|_{U_0}$ ①

$\forall t\in[0,1]$. Έστω $U_t$ κανονική περιοχή του $c(t)$
$c([0,1]) \subseteq \bigcup_{0\le t\le 1} U_t \xrightarrow[\text{συμπαγές}]{c([0,1])} c([0,1]) \subset U_0\cup U_{t_1}\cup\ldots\cup U_{t_k}$

$p\in U_{t_k}$

$U_0\cap U_{t_1} \neq \emptyset$. Έστω $p_1\in U_0\cap U_{t_1}$
$① \to \left\{\begin{aligned}\varphi_1(p_1) &= \varphi_2(p_1)\\ d_{p_1}\varphi_1 &= d_{p_1}\varphi_2\end{aligned}\right. \Longrightarrow \varphi_1\big|_{U_{t_1}} = \varphi_2\big|_{U_{t_1}}$

Επαγωγικά πάω μέχρι $U_{t_k}$. Έτσι, $\varphi_1 = \varphi_2$.

Στις γεωδαισιακές πολικές συντεταγμένες: $\rho>0,\ 0<\theta<2\pi$

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0 \Longrightarrow (G)_{\rho\rho\rho} + K_\rho\sqrt{G} + K(\sqrt{G})_\rho = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}(\rho,\theta) = -K(p),$$

Από Taylor: $f(\rho) = f(0) + f'(0)\rho + f''(0)\frac{\rho^2}{2} + f'''(0)\frac{\rho^3}{3} + \dots + R$

$$\sqrt{G}(\rho,\theta) = 0 + 1\cdot\rho + 0\,\frac{\rho^2}{2} - K(p)\frac{\rho^3}{3!} + R(\rho,\theta),\ \lim_{\rho\to 0}\frac{R(\rho,\theta)}{\rho^3} = 0$$

Έστω $L(r)$ μήκος γεωδαισιακού κύκλου ακτίνας $r$ =

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\|X_\theta(r,\theta)\|\,d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(r) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\sqrt{G}(r,\theta)\,d\theta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\left(r - \frac{K(p)r^3}{6} + R(r,\theta)\right)d\theta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(r(2\pi-2\varepsilon) - \frac{K(p)r^3}{6}(2\pi-2\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}R(r,\theta)\,d\theta\right) =$$

$$= 2\pi r - \frac{K(p)r^3}{6}\cdot 2\pi + R_1(r) \Rightarrow, \text{ με } \lim_{r\to 0}\frac{R_1(r)}{r^3} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi r - L(r) = \frac{\pi}{3}K(p)r^3 - R_1(r) \Rightarrow \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} = \frac{\pi}{3}K(p) - \frac{R_1(r)}{r^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r - L(r)}{r^3} = \frac{\pi}{3}K(p)}$$

Δηλαδή: $\begin{cases} L(r) = 2\pi r \Rightarrow K(p) = 0 \\ K>0 \Rightarrow L(r) < 2\pi r, \text{ για } r\to 0 \\ K<0 \Rightarrow L(r) > 2\pi r, \text{ για } r\to 0 \end{cases}$

Στην ουσία άλλη Απόδειξη για το έξοχο Θεώρημα

$A(r)$ = Εμβαδό του γεωδ. δίσκου ακτίνας $r$. Κάνοντας ίδια δουλειά με πριν θα πάρω:

$$\lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi}\,\frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} = K(p)$$

Ίδια σχόλια με πριν.

Γνωρίζω με $L^2 \geq 4\pi A$. Με ίδια διαδικασία παίρνω:

$4\pi A(r) - L^2(r) = \pi^2 r^4 K(p) + R_1(r)$, με $\lim_{r\to 0} \frac{R_1(r)}{r^4} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0} \frac{4\pi A(r) - L^2(r)}{r^4} = \pi^2 K(p).$$

Δηλαδή: $\begin{cases} K>0 \Rightarrow L^2(r) < 4\pi A(r) \\ K<0 \Rightarrow L^2(r) > 4\pi A(r) \end{cases}$, για $r\to 0$